Cálculo II
Examen IX

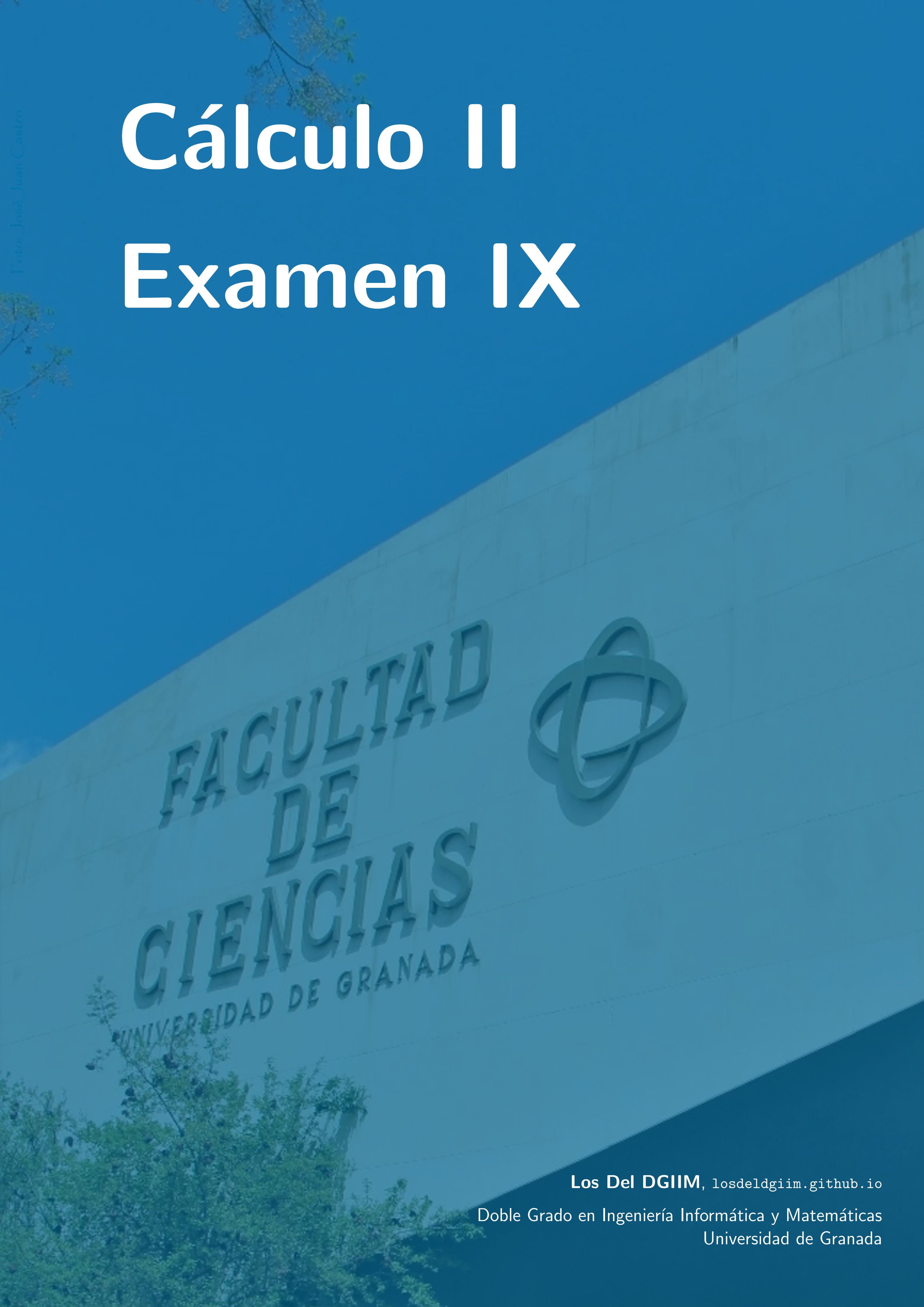


Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo II
Examen IX

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Cálculo II.

Curso Académico 2017-18.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Descripción Convocatoria Ordinaria.

Ejercicio 1 (2 puntos). Teorema de Rolle. Teorema del Valor Medio.

Teorema .1 (Teorema de Rolle)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a.b]$ *y derivable en* $]a, b[$ *tal que* $f(a) = f(b)$*. Entonces,*

$$\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$$

Demostración. En el caso de que f sea constante, tenemos que $f'(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$, por lo que se tiene el resultado.

Supongamos f no constante. Al ser continua en $[a, b]$, por el Teorema de Bolzano-Weierstrass tenemos que $\exists m, M \in \mathbb{R}$, con $m < M$ tal que $f([a, b]) = [m, M]$. Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(c_1) = m,\ f(c_2) = M$.

- $\underline{m \neq (f(a) = f(b))}$: Tenemos que $c_1 \in]a, b[$, y es un mínimo relativo, por lo que $f'(c_1) = 0$.
- $\underline{M \neq (f(a) = f(b))}$: Tenemos que $c_2 \in]a, b[$, y es un máximo relativo, por lo que $f'(c_2) = 0$.

Puesto que $m \neq M$, seguro que estamos al menos ante uno de los dos casos anteriores, por lo que $\exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$. □

Teorema .2 (Teorema del Valor Medio)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y derivable en* $]a, b[$*. Entonces,*

$$\exists c \in]a, b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración. Sea $r(x)$ la recta que pasa por los puntos $(a, f(a)), (b, f(b))$:

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Consideramos ahora la función $h(x) = f(x) - r(x)$.

$$h(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) + 0 = 0$$
$$h(b) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

Como $h(a) = h(b)$, estamos ante las condiciones de Rolle. Por tanto, $\exists c \in]a, b[$ tal que:

$$0 = h'(c) = f'(c) - r'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por tanto,

$$\exists c \in]a, b[\mid f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

□

Ejercicio 2 (2 puntos). Decir si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones, justificando la respuesta:

1. Toda función cóncava hacia arriba es uniformemente continua.

   Esto es falso, ya que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba pero no es uniformemente continua. Por tanto, el enunciado es **falso**.

2. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto tal que todos los puntos de A son de acumulación de A, $f : A \to \mathbb{R}$ es derivable y f' no se anula, entonces f es inyectiva.

   - **Opción 1**: Usando el Teorema de Rolle:
     Sabemos que f es derivable en $A = A \cap A'$, por lo que también es continua en A.
     Supongamos que $\exists x, y \in A$, con $x < y$, tal que $f(x) = f(y)$. Entonces, por el Teorema de Rolle, $\exists c \in]x, y[\mid f'(c) = 0$. No obstante, esto no es posible ya que f' no se anula, por lo que deducimos que $\nexists x, y \in A,\ x < y$, con $f(x) = f(y)$.
     Por tanto, $f(x) = f(y) \iff x = y$, por lo que f es inyectiva.
     Opción 2: Sin usar el Teorema de Rolle:
     Como es derivable en $A = A \cap A'$, y como f' no se anula, tenemos que f es estrictamente monótona. Por tanto, dados $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, tenemos que $f(x) < f(y)$ o $f(x) > f(y)$. En cualquier caso, tenemos que $x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$.
     Por tanto,
     $$f(x) = f(y) \iff x = y$$
     por lo que f es inyectiva.

   Por tanto, tenemos que el enunciado es **cierto**.

3. Sea I un intervalo no trivial y $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que f' tiene un único cero en x_0 y f tiene un extremo relativo en x_0. ¿Tiene f un extremo absoluto en x_0?

   El enunciado es **cierto**. Veámoslo.

   - Suponemos que x_0 mínimo relativo:
     Es decir, $\exists r > 0 \mid]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$ y que, $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ se tiene que $f(x) > f(x_0)$.
     Para que x_0 no sea mínimo absoluto, es necesario que $\exists x_m \in I \mid f(x_m) \leq f(x_0)$. Por tanto, como la función es continua, es necesario que exista un $x_0' \in \mathbb{R}$ entre x_m y x_0 en el que $f(x_0') = f(x_0)$. Por Rolle, tenemos que $\exists c \neq x_0 \mid f'(c) = 0$, en contradicción con que f' solo tiene un cero.
     Por tanto, tenemos que x_0 es un mínimo absoluto.
   - Suponemos que x_0 máximo relativo:
     Es decir, $\exists r > 0 \mid]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq A$ y que, $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ se tiene que $f(x) < f(x_0)$.
     Para que x_0 no sea máximo absoluto, es necesario que $\exists x_m \in I \mid f(x_m) \geq f(x_0)$. Por tanto, como la función es continua, es necesario que exista un $x_0' \in \mathbb{R}$ entre x_m y x_0 en el que $f(x_0') = f(x_0)$. Por Rolle, tenemos que $\exists c \neq x_0 \mid f'(c) = 0$, en contradicción con que f' solo tiene un cero.
     Por tanto, tenemos que x_0 es un máximo absoluto.

   Por tanto, en ambos casos tenemos que x_0 es un extremo relativo.

4. La función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 + t^2 + 1} dt \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

tiene límite en $+\infty$.

Consideramos $f_I(t) = \sqrt{t^5 + t^2 + 1}$, por lo que $f(x) = \int_0^x f_I(t)\,dt$.
Sea ahora $g_I(t) = \sqrt{t}$, y definamos $g(x) = \int_0^x g_I(t)\,dt$.

$$g(x) = \int_0^x g_I(t)\,dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^x = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3}x\sqrt{x} = +\infty$$

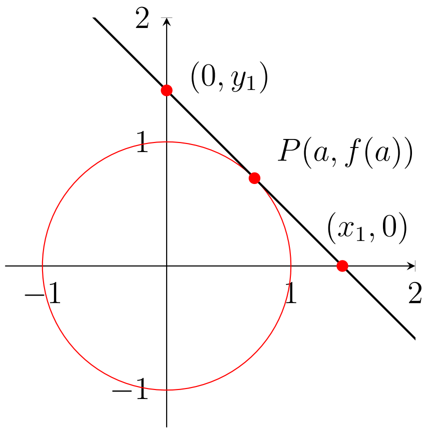
Por tanto, tenemos que $g(x)$ diverge positivamente.

Como tenemos que $0 \leq g_I(x) \leq f_I(x)$ y todas ellas son continuas por lo que localmente integrables en $\mathbb{R}^+$, tenemos que:

$$f(x) = \int_0^\infty f_I(t)\,dt \text{ convergente} \Longrightarrow g(x) = \int_0^\infty g_I(t)\,dt \text{ convergente}$$

Como $g(x)$ no es convergente, tenemos que $f(x)$ tampoco. Por tanto, es **falso**.

Ejercicio 3 (2 puntos). Cada tangente a la circunferencia unidad en un punto cualquiera del primer cuadrante corta a los dos ejes en dos puntos de la forma $(x_1, 0)$ y $(0, y_1)$. Halla la ecuación de la recta tangente para que la suma $x_1 + y_1$ sea mínima.



Trabajamos en primer lugar con la ecuación de la circunferencia. La ecuación de la circunferencia unidad es:

$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Como estamos trabajando en el primer cuadrante, con valores de $y \geq 0$, tenemos que:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Como el punto P pertenece a la circunferencia, tenemos que:

$$f(a) = \sqrt{1-a^2}$$

Trabajamos ahora con la recta. Por la interpretación geométrica, tenemos que:

$$m_t = f'(a) = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Tenemos que la recta que pasa por los dos puntos de corte es:

$$r(x) = y_1 + m_t x = y_1 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot x$$

Como el punto P pertenece a la recta, tenemos que:

$$r(a) = y_1 - \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}$$

Usando que el punto P pertenece tanto a la circunferencia como a la recta,

$$f(a) = r(a) \Longrightarrow \sqrt{1-a^2} = y_1 - \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}} \Longrightarrow 1 - \cancel{a^2} = y_1 \cdot \sqrt{1-a^2} - \cancel{a^2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

Por tanto, la recta queda:

$$r(x) = y_1 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot x = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot x = \frac{1-ax}{\sqrt{1-a^2}}$$

Para $x = x_1$, tenemos que $r(x_1) = 0$:

$$r(x_1) = 0 \Longleftrightarrow 1 = ax_1 \Longleftrightarrow x_1 = \frac{1}{a}$$

Por tanto, la función a minimizar es:

$$\begin{aligned} S:]0,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longrightarrow S(a) = x_1 + y_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

$$S'(a) = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}} = -\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(1-a^2)\sqrt{1-a^2}} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a^3 = (1-a^2)\sqrt{1-a^2} \Longleftrightarrow a^6 = (1-a^2)^3 \Longleftrightarrow a^2 = 1-a^2 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comprobemos que el punto crítico es un mínimo relativo.

- Para $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$: $S'(a) < 0 \Longrightarrow S(a)$ estrictamente decreciente.
- Para $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$: $S'(a) > 0 \Longrightarrow S(a)$ estrictamente creciente.

Por tanto, tenemos que $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un mínimo relativo. Como A es derivable y es definida en un intervalo, como es un mínimo relativo también es un mínimo absoluto.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, el punto $(a, f(a))$ que minimiza esa suma es:

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Además, tenemos que:

$$x_1 = y_1 = \sqrt{2}$$

Ejercicio 4 (2 puntos). Calcula los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{arc\,sen}(t)\arctan(t)dt}{(\ln(1+x))^3}$

   Como tenemos que el integrando es una función continua y acotada, tenemos que es Riemman Integrable. Por tanto, se puede emplear el TFC para calcular la derivada del numerador. Se empleará en la resolución del límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{arc\,sen}(t)\arctan(t)dt}{(\ln(1+x))^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)\arctan(x)}{3\frac{\ln^2(1+x)}{1+x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\operatorname{arc\,sen}(x)\arctan(x)}{3\ln^2(1+x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H\hat{o}pital}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen} x \arctan x + \frac{(1+x)\arctan x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{(1+x)\operatorname{arc\,sen} x}{1+x^2}}{6\frac{\ln(1+x)}{1+x}}$$

   Aplicando que el límite de la suma es la suma de los límites, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{arc\,sen}(t)\arctan(t)dt}{(\ln(1+x))^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\operatorname{arc\,sen} x \arctan x}{6\ln(1+x)} + \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2\arctan x}{6\sqrt{1-x^2}\ln(1+x)} + \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2\operatorname{arc\,sen} x}{6(1+x^2)\ln(1+x)}$$

Aplicando que el límite del producto es el producto de los límites, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{arc\,sen}(t)\arctan(t)dt}{(\ln(1+x))^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\operatorname{arc\,sen}x}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2}{6\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}+$$
$$+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2}{6(1+x^2)}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}x}{\ln(1+x)}$$

Calculo los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln 1+x}\overset{L'H\hat{o}pital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1+x^2}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}x}{\ln 1+x}\overset{L'H\hat{o}pital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

Por tanto, usando los límites calculados, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{arc\,sen}(t)\arctan(t)dt}{(\ln(1+x))^3}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\operatorname{arc\,sen}x}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2}{6\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}+$$
$$+\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2}{6(1+x^2)}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}x}{\ln(1+x)}=0\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{3}$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\left(\frac{2+\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}x}\right)}{x}}\overset{Ec.\ 1}{=}e^1=e$$

donde previamente he resuelto esta indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{2+\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}x}\right)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{L'H\hat{o}pital}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x(2-\operatorname{sen}x)+\cos x(2+\operatorname{sen}x)}{(2-\operatorname{sen}x)^2}}{\frac{2+\operatorname{sen}x}{2-\operatorname{sen}x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x(2-\operatorname{sen}x)+\cos x(2+\operatorname{sen}x)}{2-\operatorname{sen}x}}{2+\operatorname{sen}x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(2-\operatorname{sen}x)+\cos x(2+\operatorname{sen}x)}{(2+\operatorname{sen}x)(2-\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(2-\operatorname{sen}x+2+\operatorname{sen}x)}{4-\operatorname{sen}^2(x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x}{4-\operatorname{sen}^2(x)}=1\quad(1)$$

Ejercicio 5. Sea $f:I\to\mathbb{R}$ de clase $C^{n+1}(I)$, $n\in\mathbb{N}$ y $P_{n,a}^f(x)$ su polinomio de Taylor de grado n centrado en el punto $a\in I$. Probar que $\forall x\in I,\ x\neq a$ se cumple:

$$f(x)-P_{n,a}^f(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

(Indicación: Inducción e integración por partes)

Por el TFC, como f es de clase $n+2$, $f^{n+2)}(x)$ es continua y por tanto Riemman Integrable en I, y por el TFC tenemos que:

$$\int f^{p+1)}(x)\,dx = f^{p)}(x) \qquad \forall p \leq n+1$$

Demostramos ahora la igualdad por inducción sobre n:

- Para $n = 0$:

  Resolvemos la integral del término de la derecha.

  $$\int_a^x f'(t)\,dt = [f(t)]_a^x$$

  Por tanto, la igualdad a demostrar es:

  $$f(x) - P_{0,a}^f(x) = \frac{1}{0!}[f(t)]_a^x \Longleftrightarrow f(x) - \frac{f(a)}{0!}x^0 = f(x) - f(a)$$

  Por tanto, tenemos que es cierto para $n = 0$.

- Supuesto cierto para $n-1$, demostramos para n:

  Resolvemos la integral del término de la derecha.

  $$\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \left[\begin{array}{cc} u(t) = (x-t)^n & u'(t) = -n(x-t)^{n-1} \\ v'(t) = f^{n+1)}(t) & v(t) = f^{n)}(t) \end{array}\right] =$$
  $$= \left[f^{n)}(t)(x-t)^n\right]_a^x + n\int_a^x f^{n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

  Usando la hipótesis de inducción, resolvemos la integral restante:

  $$\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \left[f^{n)}(t)(x-t)^n\right]_a^x + n(n-1)!\left[f(x) - P_{n-1,a}^f(x)\right] =$$
  $$= -f^{n)}(a)(x-a)^n + n!\left[f(x) - P_{n-1,a}^f(x)\right]$$

  Pasando el factorial dividiendo, tenemos que:

  $$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = -\frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \left[f(x) - P_{n-1,a}^f(x)\right]$$

  No obstante, tenemos que el término $n-$ésimo del polinomio de Taylor en cuestión, por lo que tenemos:

  $$\frac{1}{n!}\int_a^x f^{n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = f(x) - P_{n,a}^f(x)$$

  Por tanto, lo tenemos demostrado para n.